2014-2015

Nom : ______________________________

CHAPITRE 5 : FONCTIONS EXPONENTIELLES, PÉRIODIQUES ET QUADRATIQUES

5.1 ÉTUDE D'UNE FONCTION

- Voici un petit rappel des éléments à fournir :

  1. **Domaine (x):** toutes les valeurs possibles de la variable indépendante
  2. **Codomaine ou image (y)** : toutes les valeurs possibles de la variable dépendante
  3. **Zéro(s) de fonction ou abscisse à l'origine (x)** : c'est la valeur de la variable indépendante aux endroits où le graphique croise l'axe des x.
  4. **Ordonnée à l'origine (y):** c'est la valeur de la variable dépendante à l'endroit où le graphique croise l'axe des y.
  5. **La variation (x)** : donner les moments où la fonction est :
     a) Croissante (monte de gauche à droite incluant les constantes)
     b) Décroissante (descend de gauche à droite incluant les constantes)
     c) Strictement croissante (monte de gauche à droite excluant les constantes)
     d) Strictement décroissante (descend de gauche à droite excluant les constantes)
     e) Constante (reste à la même hauteur)
  6. **Le signe (x)** : donner les moments où la fonction est
     a) Positive (au-dessus de l'axe des x.)
     b) Négative (au-dessous de l'axe des x.)
  7. **Les extremums (y)** :
     a) Maximum : la plus grande valeur possible de la variable dépendante.
     b) Minimum : la plus petite valeur possible de la variable dépendante

- **Attention** : On peut avoir deux écritures différentes :
  [,] → les crochets signifient qu'on inclut toutes les valeurs entre les extrémités données.
  { , } → les accolades signifient que ce ne sont que les valeurs indiquées qui font parties de l'ensemble.

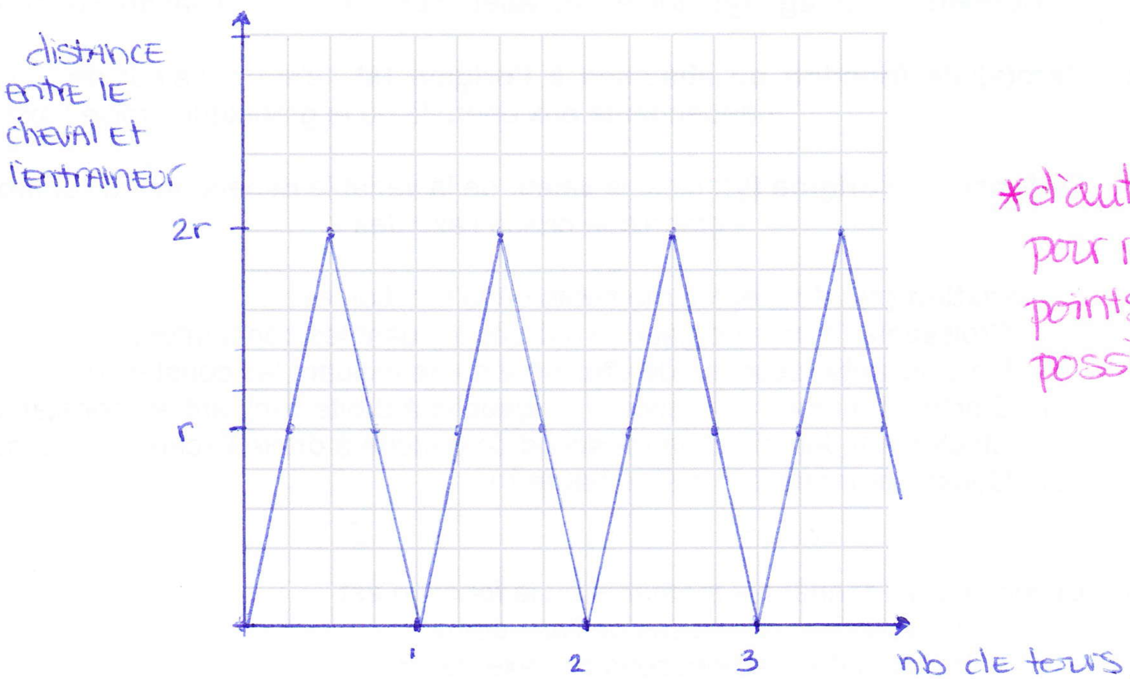
- La **réciproque** d'une fonction se trouve en inversant les x et les y de celle-ci.

5.2 LA FONCTION PÉRIODIQUE

Exemple 1 : Une de mes amies aime énormément les chevaux. Elle a commencé à faire de l'équitation il y a de cela environ deux ans. Maintenant, elle est une pro et elle fait même du rodéo. Par contre, au début, je me souviens qu'elle avait beaucoup de difficulté. Alors, l'entraineur lui a fait faire un exercice avec le cheval. Elle devait tourner en rond dans l'enclos. L'entraineur restait à la porte et l'observait.

Il était important pour l'entraineur de toujours voir pour pouvoir intervenir peu importe ce qui se passait. Positionné ainsi, la distance entre l'entraîneur et le cheval augmentait et diminuait, mais il pouvait toujours voir et être alerte.

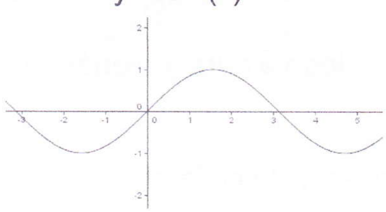
Représente dans un graphique la distance entre le cheval et l'entraineur en fonction du temps.



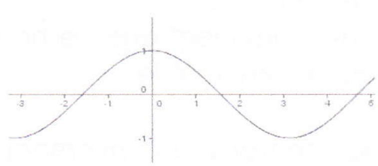
d'autres formes pour relier les points sont possibles

- La **réciproque** de la fonction périodique **n'**est **pas** une fonction.
- La fonction périodique n'a pas de forme de base de règle. Voici trois modèles de fonction qui représentent une fonction périodique car le « dessin » se répète.

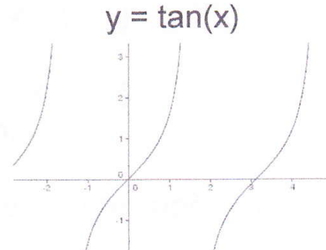
$y = \sin(x)$



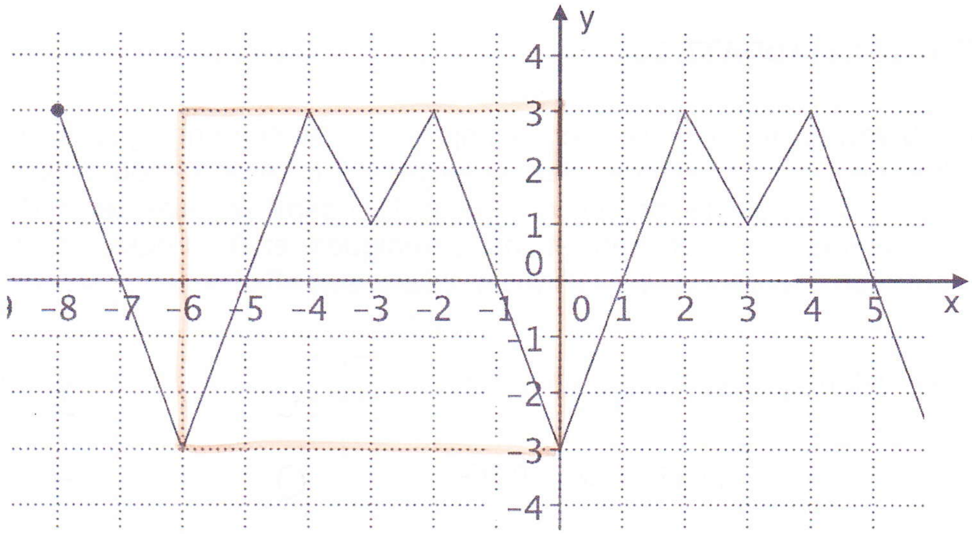
$y = \cos(x)$



$y = \tan(x)$



Exemple 2



Domaine	[-8, +∞[	
Codomaine	[-3, 3]	
Variation	Croissance	[-6,-4] ∪ [-3,-2] ∪ [0,2] ∪ [3,4] ∪ ...
	Décroissance	[-8,-6] ∪ [-4,3] ∪ [-2,0] ∪ [2,3] ∪ ...
	Constance	∅
Signe	Positif	[-8,-7] ∪ [-5,-1] ∪ [1,5] ∪ ...
	Négatif	[-7,-5] ∪ [-1,1] ∪ ...
Coordonnées à l'origine	Zéro de fonction	{-7, -5, -1, 1, 5, ...}
	Valeur initiale	{-3}
Extremum	Maximum	{3}
	Minimum	{-3}
Période	$P = X_{MAX} - X_{min} = 0 - {}^{-}6 = 6$	

Que vaut f(60)? -3

← plus longue, mais moins compliqué

60-6=54
54-6=48
48-6=42
42-6=36

36-6=30
30-6=24
24-6=18
18-6=12
12-6=6

6-6=0
f(60)=f(0)=-3

ou

ex

$X_{fin} - X_{ini} = 60 - 0 = 60$
60 ÷ P = 60 ÷ 6 = 10 pe
image = -3

d'autres valeurs sont possibles. Cette valeur revient le début.

5.3 FONCTION QUADRATIQUE

Exemple: Tu veux aider ta petite sœur à impressionner son enseignante de mathématique lors de son exposé oral. Son enseignante lui a demandé d'expliquer la relation qui existe entre la mesure d'un côté d'un carré et l'aire de ce dernier. Toi qui a utilisé déjà les représentations graphiques et les règles de fonctions, tu lui propose d'ajouter un peu d'inconnu dans son affiche.

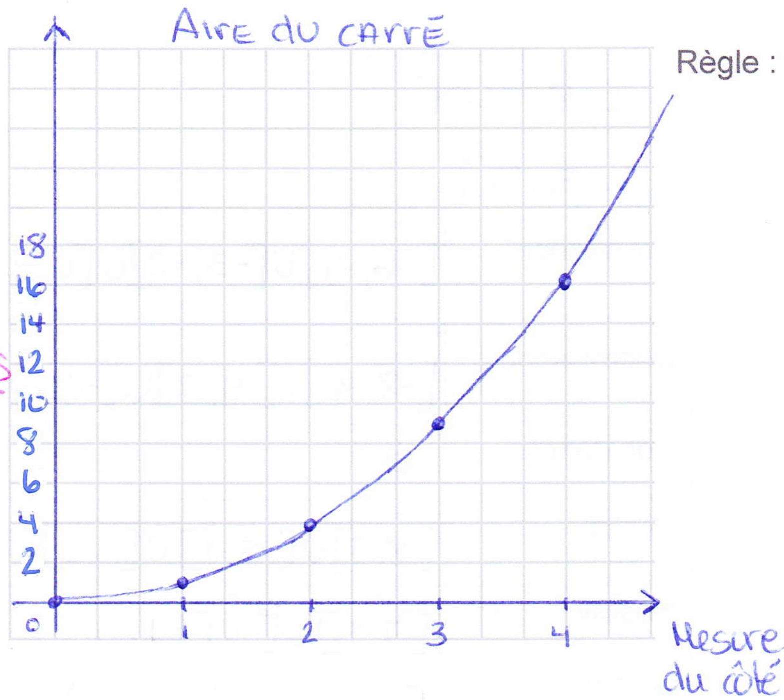
Table des valeurs :

Mesure du côté	0	1	2	3	4
Aire du carré	0	1	4	9	16

Graphique :

Aire du carré

* passe toujours par (0,0)



Règle : Aire = côté · côté

Aire = côté^2

$y = x^2$ $\begin{cases} x : \text{mesure du côté} \\ y : \text{Aire du carré} \end{cases}$

- La fonction se nomme aussi fonction **polynomiale de degré 2**, car elle est composée d'un polynôme avec un exposant 2.

- Elle est représentée dans le plan cartésien par une courbe qui porte le nom de parabole. (Elle a la forme d'un « u ».)

- Lorsqu'on fait l'étude d'une fonction quadratique, il faut ajouter, à toutes les autres propriétés, le sommet (0,0) et l'équation de l'axe de symétrie (x = 0)

Preuve d'une fonction quadratique :
(Dans un graphique, il faut observer la courbe. Si elle ressemble à un « u » et qu'elle passe par (0, 0), il s'agit d'une fonction quadratique)

+1 +1 +1 +1 → bonds additifs constants

x	2	3	4	5	6
y	16	36	64	100	144

+20 +28 +36 +44

$\boxed{+8 \quad +8 \quad +8}$ 2

2E bond additif constant donc fct quadratique

Règle :

$$y = ax^2$$

$\begin{cases} x : \text{VAR. indépendante} \\ y : \text{VAR. dépendante} \\ a : \text{OUVERTURE DE LA PARABOLE} \\ a \neq 0 \end{cases}$ → a + U, a − ∩

voir graphique Challenge U

Étapes pour trouver la règle :

1. Prouver que c'est une fonction quadratique
2. Ressortir deux points
3. Remplacer les x et y de l'équation avec un point et isoler « *a* »
4. Valider la valeur de « *a* » avec le deuxième point ressorti
5. Écrire la règle

Exemple: Trouve l'équation de la fonction représentée par la table des valeurs ci-dessous

1-identifier les variables
↳ si ce n'est pas x et y dans la table.

+3 +3 +3 +3

x	7	10	13	16	19
y	1225	2500	4225	6400	9025

+1275 +1725 +2175 +2625

$\boxed{+450 \quad +450 \quad +450}$ → fct quadratique car 2e bond additif constant

2-Preuve

3- trouver "a"

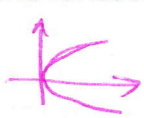
$y = ax^2 \quad (7, 1225)$
$1225 = a(7)^2$
$1225 = a \cdot 49$
$\div 49 \qquad \div 49$
$25 = a.$

4-valider "a"

$y = 25x^2 \quad (10, 2500)$
$2500 \overset{?}{=} 25(10)^2$
$2500 \overset{?}{=} 25 \cdot 100$
$2500 \overset{?}{=} 2500$!!

$$y = 25x^2$$

La **réciproque** d'une fonction quadratique n'est pas une fonction.



géogebra

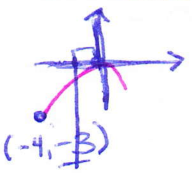
Étapes pour trouver la règle à partir d'un **contexte** :

1. Identifier les variables
2. Ressortir le point donné dans le contexte
   (Attention de bien représenter le problème)
3. Faire les calculs comme vus précédemment
4. Écrire la règle

Problèmes :

1. Vous lancez un ballon dans un panier :
Vous vous situez à 3m sous le panier et à 4m à gauche de ce panier.
À combien de mètres du panier sera le ballon lorsqu'il aura une hauteur de 2m?

1-représentation



(-4,-3)

2-Variables

x: dist. g/d

y: dist. h/b

3-trouver "a"

$y = ax^2 \quad (-4,-3)$

$-3 = a(-4)^2$

$-3 = a \cdot 16$

$\div 16 \quad \div 16$

$\frac{-3}{16} = a$

$y = -\frac{3}{16}x^2$

4- x si y=-1

$y = -\frac{3}{16}x^2 \quad (x,-1)$

$-1 = -\frac{3}{16}x^2$

$\div -\frac{3}{16} \quad \div -\frac{3}{16}$

$\sqrt{\frac{16}{3}} = \sqrt{x^2}$

$\pm 2{,}41\text{m} = x$

Le ballon sera a 2,41m à gauche ou à droite du panier

2. Voici plusieurs points : (0,5; 0,5) (1,5; 4,5) (2,5; 12,5) (3,5; 24,5)

a) Quelle serait la valeur de y si x= 4,7? ← il faut trouver la règle.

b) Quelle sera la mesure de n si n= 2x et y=35?

1-Preuve

x	0,5	1,5	2,5	3,5
y	0,5	4,5	12,5	24,5

x : +1 +1 +1 → bonds additifs constants

y : +4 +8 +12

+4 +4 → 2^E bonds additifs constants donc fct quadratique

2-trouver "a"

$y = ax^2 \quad (0{,}5;0{,}5)$

$0{,}5 = a(0{,}5)^2$

$0{,}5 = a \cdot 0{,}25$

$\div 0{,}25 \quad \div 0{,}25$

$2 = a$

3-Valider

$y = 2x^2 \quad (1{,}5;4{,}5)$

$4{,}5 \stackrel{?}{=} 2(1{,}5)^2$

$4{,}5 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 2{,}25$

$4{,}5 = 4{,}5$!! ☺

4-Règle

$y = 2x^2$

5-Répondre question a)

$x = 4{,}7 \,;\, y = ?$

$y = 2x^2$

$y = 2 \cdot 4{,}7^2$

$y = 2 \cdot 22{,}09$

$y = 44{,}18$.

6-répondre question b)

1- x=? si y=35.

$y = 2x^2$

$35 = 2x^2$

$\div 2 \quad \div 2$

$\sqrt{17{,}5} = \sqrt{x^2}$

$\pm 4{,}18 = x$.

2- $n = 2x \,;\, x = \pm 4{,}18$

$n = 2(\pm 4{,}18)$

$n = \pm 8{,}36$.

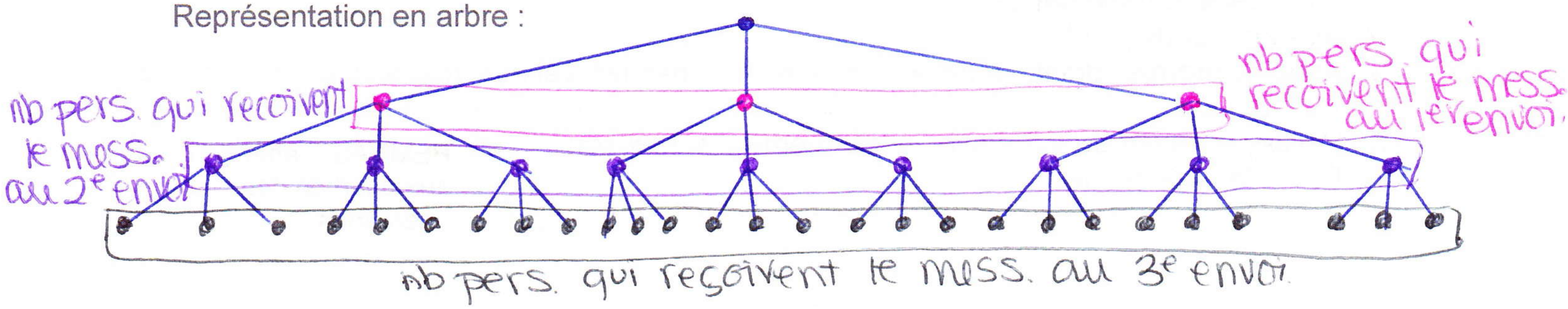
5.4 FONCTION EXPONENTIELLE

- La fonction exponentielle est une fonction dont la variable indépendante (x) se trouve à l'exposant.
- Elle possède une asymptote. C'est une droite dont le graphique s'approche sans jamais y toucher. Elle est sur l'axe des x et son équation est f(x) = 0. Lorsqu'on fait les propriétés de la fonction, il ne faut pas oublier l'équation de l'asymptote.

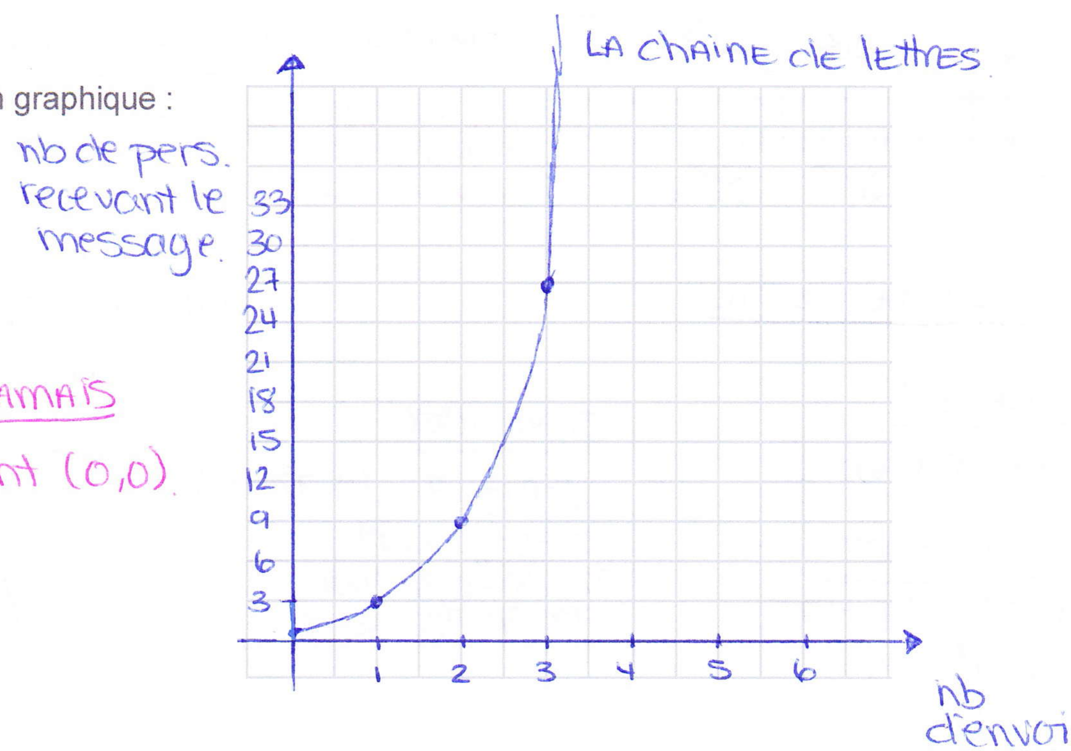
Exemple : Tu décides de commencer une chaîne de message d'amour et d'amitié sur Internet. À la fin du message, tu marques cette phrase : « Envoie ce message à trois personnes pour leur dire que tu les apprécies. Ne casse pas la chaîne puisque tu auras 5 ans de malheurs. »

Tu te demandes combien de personnes recevront le message au 3e envoi fait par les autres.

Représentation en arbre :



Représentation graphique :



* ne passe jamais par le point (0,0)

bonds additifs constants

Preuve d'une fonction exponentielle :
(dans un graphique, il faut s'assurer que nous avons une courbe qui ne passe pas par le point (0, 0) et qui ne croise jamais l'axe des x)

x	2	3	4	5	6
y	12	24	48	96	192

+1 +1 +1 +1

×2 ×2 ×2 ×2

bonds multiplicatifs constants

Règle : $y = a \cdot c^x$

$a \neq 0$

$c \neq 0, \pm 1$

a : ordonnée à l'origine

c : base (bond multiplicatif si +1 en x)

x : variable indépendante

y : variable dépendante

Étapes pour trouver la règle à partir d'un **graphique** ou d'une **table des valeurs** :

1. Prouver que c'est une fonction exponentielle
2. Trouver le bond multiplicatif en y lorsqu'on a le bond additif de 1 en x. Remplacer le « c » dans le règle par cette valeur
3. Ressortir deux points.
4. Avec le premier point, remplacer le x et le y par les valeurs respectives et isoler le « a ».
5. Valider la valeur de « *a* » avec le deuxième point ressorti.
6. Écrire la règle finale

PEMDAS... attention aux priorités des opérations

Exemples: Trouve l'équation des fonctions représentées par les tables des valeurs suivantes

2-Preuve

x	2	4	7
y	14,70	720,30	247 062,90

+2 +3

×49 ×343.

← bonds additifs non constants ($\neq +1$)

← bonds multiplicatifs non constant. ... mais trouvons, quand +1 en x, quel serait le bond en y.

$\sqrt{49} = 7$ $\sqrt[3]{343} = 7$

↳ la $\sqrt{\ }$ dépend du « + » en x

1 - Variables si nécessaire

3 - bond (« c »)

c = 7 (voir preuve)

4 - Trouver « a »

$y = a \cdot 7^x$ (2 ; 14,70)

$14{,}70 = a \cdot 7^2$

$14{,}70 = a \cdot 49$

$\div 49 \quad \div 49$

$0{,}3 = a$.

5 - Valider

$y = 0{,}3 \cdot 7^x$ (4 ; 720,30)

$720{,}30 \stackrel{?}{=} 0{,}3 \cdot 7^4$

$720{,}30 \stackrel{?}{=} 0{,}3 \cdot 2401$

$720{,}30 = 720{,}30$ ☺.

$y = 0{,}3 \cdot 7^x$

Attention ne jamais les mettre ensemble.

Étapes pour trouver la règle à partir d'un **contexte** :

5. Identifier les variables
6. Identifier la valeur initiale (a)
7. Identifier la valeur de la base (c)
   (s'il y a un contexte avec un pourcentage, il faut ajouter 1 à ce dernier si le pourcentage fait augmenter la valeur initiale ou il faut soustraire le pourcentage à 1 si ce dernier fait diminuer cette valeur)
8. Écrire la règle

Exemples

1. Olivia a placé 1500$ à un taux d'intérêt composé de 5% par année. Combien d'argent aura-t-elle dans 2 ans?

1- Variables

x: temps après l'ouverture (année)
y: valeur du placement ($).

2- bond

$c = 1 + 5\%$
$c = 1,05$.

3- Valeur départ

$a = 1500\,\$$

4- Règle

$y = 1500 \cdot 1,05^x$

5- y si x = 2 ans.

$y = 1500 \cdot 1,05^x$
$y = 1500 \cdot 1,05^2$ 4 déc.
$y = 1500 \cdot 1,1025$
$y = 1653,75\,\$$

Olivia aura 1653,75$ dans son placement après 2 ans.

2. Un scientifique tente de faire augmenter sa colonie de bactéries. Il en a 3 et il sait que ces dernières doublent à toutes les heures. Combien y en aura-t-il dans une journée?

1- Variables

x: temps écoulé (h).
y: nb bactéries

2- bond

c = 2 car le nb double à chaque heure

3- Valeur départ

a = 3 bactéries

4- Règle

$y = 3 \cdot 2^x$

5- y = ? si x = 24h

1 journée = 24h.

$y = 3 \cdot 2^x$
$y = 3 \cdot 2^{24}$
$y = 3 \cdot 16\,777\,216$
$y = 50\,331\,648$ bactéries

Le scientifique aura 50 331 648 bactéries après 1 journée

3. Marie s'est acheté une automobile. Elle a payé 23 200$ pour son auto et elle sait que celle-ci perdra 9% de sa valeur à chaque année.
   a) Combien vaudra-t-elle dans 15 ans?

1- Variables

x: temps écoulé (année)
y: valeur de l'auto ($).

2- bond

9% ↓
$c = 1 - 9\%$
$c = 0,91$

3- Valeur départ

$a = 23\,200\,\$$.

4- Règle

$y = 23\,200 \cdot 0,91^x$

5- y si x = 15 ans

$y = 23\,200 \cdot 0,91^x$
$y = 23\,200 \cdot 0,91^{15}$
$y = 23\,200 \cdot 0,2430$
$y = 5637,60\,\$$.

l'auto de Marie vaudra 5 637,60$ dans 15 ans.

   b) Dans combien de temps son auto vaudra-t-elle autour de 9 928$?

$y = 23\,200 \cdot 0,91^x$.   * Par essai-erreurs *

x = ? si y = 9928 $

si x = 10 ans

$y = 23\,200 \cdot 0,91^x$
$y = 23\,200 \cdot 0,91^{10}$
$y = 23\,200 \cdot 0,3894$
$y = 9034,08\,\$$

si x = 9 ans.

$y = 23\,200 \cdot 0,91^x$
$y = 23\,200 \cdot 0,91^9$
$y = 23\,200 \cdot 0,4279$
$y = 9927,28\,\$$.

l'Auto de Marie vaudra autour de 9928 $ après 9 ans.